

# **Geometrizando a Mecânica Quântica**

## ***Uma História da Geometria na Física***

Daniel Doro Ferrante

Brown University

`danielf@het.brown.edu`

# Geometria e Física: Os primórdios

Geometria e Física: Os primórdios

Era uma vez. . .

A Geometria de Galileo

A Geometria de Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

A Geometria de Einstein

A Geometria da Mecânica Quântica

Perguntinha Capciosa

# Era uma vez...

- Percepção sensorial: Geométrica (álgebra é secundária).

Geometria e Física: Os primórdios  
Era uma vez...

A Geometria de Galileo

A Geometria de Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

A Geometria de Einstein

A Geometria da Mecânica Quântica

Perguntinha Capciosa

# Era uma vez...

- Percepção sensorial: Geométrica (álgebra é secundária).
- Babilônia: Idéias sobre o Teorema de Pitágoras 1000 anos **antes** de Pitágoras!

Geometria e Física: Os primórdios  
Era uma vez...

A Geometria de Galileo

A Geometria de Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

A Geometria de Einstein

A Geometria da Mecânica Quântica

Perguntinha Capciosa

# Era uma vez...

- Percepção sensorial: Geométrica (álgebra é secundária).
- Babilônia: Idéias sobre o Teorema de Pitágoras 1000 anos **antes** de Pitágoras!
- Grécia: *physiks* significa **Natureza** — *Filosofia Natural*.

Geometria e Física: Os primórdios  
Era uma vez...

A Geometria de Galileo

A Geometria de Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

A Geometria de Einstein

A Geometria da Mecânica Quântica

Perguntinha Capciosa

# Era uma vez...

- Percepção sensorial: Geométrica (álgebra é secundária).
- Babilônia: Idéias sobre o Teorema de Pitágoras 1000 anos **antes** de Pitágoras!
- Grécia: *physiks* significa **Natureza** — *Filosofia Natural*.
  - ◆ “Filósofos” tentaram entender os fenômenos Naturais sem invocar o supernatural: Hipócrates (doenças), Platão e Demócrito (átomo).

Geometria e Física: Os primórdios  
Era uma vez...

A Geometria de Galileo

A Geometria de Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

A Geometria de Einstein

A Geometria da Mecânica Quântica

Perguntinha Capciosa

# Era uma vez...

- Percepção sensorial: Geométrica (álgebra é secundária).
- Babilônia: Idéias sobre o Teorema de Pitágoras 1000 anos **antes** de Pitágoras!
- Grécia: *physiks* significa **Natureza** — *Filosofia Natural*.
  - ◆ “Filósofos” tentaram entender os fenômenos Naturais sem invocar o supernatural: Hipócrates (doenças), Platão e Demócrito (átomo).
  - ◆ Idéias geométricas importadas do Egito: aprofundadas.

Geometria e Física: Os primórdios  
Era uma vez...

A Geometria de Galileo

A Geometria de Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

A Geometria de Einstein

A Geometria da Mecânica Quântica

Perguntinha Capciosa

# Era uma vez...

- Percepção sensorial: Geométrica (álgebra é secundária).
- Babilônia: Idéias sobre o Teorema de Pitágoras 1000 anos **antes** de Pitágoras!
- Grécia: *physiks* significa **Natureza** — *Filosofia Natural*.
  - ◆ “Filósofos” tentaram entender os fenômenos Naturais sem invocar o supernatural: Hipócrates (doenças), Platão e Demócrito (átomo).
  - ◆ Idéias geométricas importadas do Egito: aprofundadas.
  - ◆ Teorema de Pitágoras e Números *Irracionais* — introdução do *infinito*.

Geometria e Física: Os primórdios  
Era uma vez...

[A Geometria de Galileo](#)

[A Geometria de Newton](#)

[Geometria e Física: O Contemporâneo](#)

[A Geometria de Einstein](#)

[A Geometria da Mecânica Quântica](#)

[Perguntinha Capciosa](#)



- Percepção sensorial: Geométrica (álgebra é secundária).
- Babilônia: Idéias sobre o Teorema de Pitágoras 1000 anos **antes** de Pitágoras!
- Grécia: *physiks* significa **Natureza** — *Filosofia Natural*.
  - ◆ “Filósofos” tentaram entender os fenômenos Naturais sem invocar o supernatural: Hipócrates (doenças), Platão e Demócrito (átomo).
  - ◆ Idéias geométricas importadas do Egito: aprofundadas.
  - ◆ Teorema de Pitágoras e Números *Irracionais* — introdução do *infinito*.
  - ◆ Aristóteles: *Primeira Filosofia* (matemática e metafísica) e *Segunda Filosofia* (da física à biologia); Leis do Movimento e Dinâmica Planetária.

Geometria e Física: Os primórdios  
Era uma vez...

A Geometria de Galileo

A Geometria de Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

A Geometria de Einstein

A Geometria da Mecânica Quântica

Perguntinha Capciosa

- Percepção sensorial: Geométrica (álgebra é secundária).
- Babilônia: Idéias sobre o Teorema de Pitágoras 1000 anos **antes** de Pitágoras!
- Grécia: *physiks* significa **Natureza** — *Filosofia Natural*.
  - ◆ “Filósofos” tentaram entender os fenômenos Naturais sem invocar o supernatural: Hipócrates (doenças), Platão e Demócrito (átomo).
  - ◆ Idéias geométricas importadas do Egito: aprofundadas.
  - ◆ Teorema de Pitágoras e Números *Irracionais* — introdução do *infinito*.
  - ◆ Aristóteles: *Primeira Filosofia* (matemática e metafísica) e *Segunda Filosofia* (da física à biologia); Leis do Movimento e Dinâmica Planetária.
- Alexandria: Euclides (geometria) e Arquimedes (aproximação precisa de  $\pi$  e quase invenção do cálculo, paradoxos de Zeno).

- Copérnico: desafia Ptolomeu (Terra → Sol no centro).

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileo Galilei

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

- Copérnico: desafia Ptolomeu (Terra  $\rightarrow$  Sol no centro).
- Galileo:

Geometria e Física: Os primórdios

---

**A Geometria de Galileo Galilei**

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

- Copérnico: desafia Ptolomeu (Terra  $\rightarrow$  Sol no centro).
- Galileo:
  - ◆ Telescópio (montanhas na Lua).

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileo Galilei

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

- Copérnico: desafia Ptolomeu (Terra → Sol no centro).
- Galileo:
  - ◆ Telescópio (montanhas na Lua).
  - ◆ Áreas e volumes escalam diferentemente ( $L^2$  e  $L^3$ ).

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileo Galilei

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

- Copérnico: desafia Ptolomeu (Terra → Sol no centro).
- Galileo:
  - ◆ Telescópio (montanhas na Lua).
  - ◆ Áreas e volumes escalam diferentemente ( $L^2$  e  $L^3$ ).
  - ◆ Movimento: planos inclinados, queda livre e parábolas (uso pesado da geometria grega).

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileo Galilei

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

- Tycho Brahe e Johannes Kepler: as observações de Tycho permitiram a Kepler concluir que as órbitas planetárias são elípticas (Leis de Kepler)!

[Geometria e Física: Os primórdios](#)

[A Geometria de Galileu](#)

[A Geometria de Newton](#)

[Isaac Newton](#)

[Isaac Newton](#)

[Geometria e Física: O Contemporâneo](#)

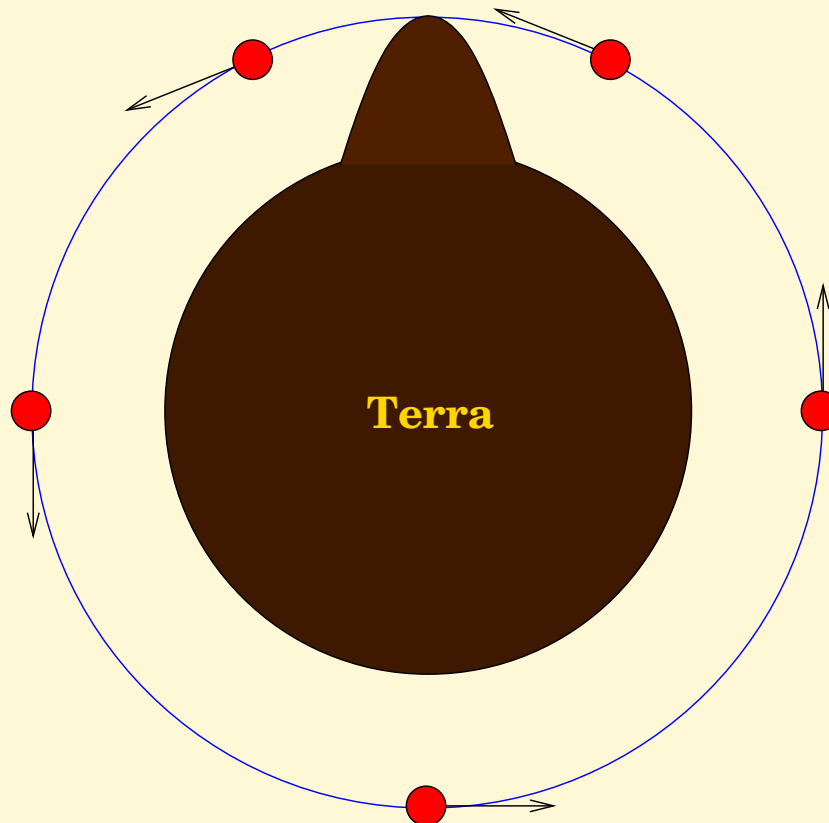
[A Geometria de Einstein](#)

[A Geometria da Mecânica Quântica](#)

[Perguntinha Capciosa](#)



- Tycho Brahe e Johannes Kepler: as observações de Tycho permitiram a Kepler concluir que as órbitas planetárias são elípticas (Leis de Kepler)!
- Newton: órbita (gravitacional) é como o movimento de projéteis — amarra as idéias de Galileo com o movimento dos corpos celestes.



Geometria e Física: Os primórdios

A Geometria de Galileo

A Geometria de Newton

Isaac Newton

Isaac Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

A Geometria de Einstein

A Geometria da Mecânica Quântica

Perguntinha Capciosa

- Leis de Newton:

[Geometria e Física: Os primórdios](#)

[A Geometria de Galileo](#)

[A Geometria de Newton](#)

[Isaac Newton](#)

[Isaac Newton](#)

[Geometria e Física: O Contemporâneo](#)

[A Geometria de Einstein](#)

[A Geometria da Mecânica Quântica](#)

[Perguntinha Capciosa](#)

- Leis de Newton:
  1. Inércia;

[Geometria e Física: Os primórdios](#)

[A Geometria de Galileo](#)

[A Geometria de Newton](#)

[Isaac Newton](#)

[Isaac Newton](#)

[Geometria e Física: O Contemporâneo](#)

[A Geometria de Einstein](#)

[A Geometria da Mecânica Quântica](#)

[Perguntinha Capciosa](#)

- Leis de Newton:
  1. Inércia;
  2.  $\vec{F} = m \vec{a}$ ;

[Geometria e Física: Os primórdios](#)

[A Geometria de Galileu](#)

[A Geometria de Newton](#)

[Isaac Newton](#)

[Isaac Newton](#)

[Geometria e Física: O Contemporâneo](#)

[A Geometria de Einstein](#)

[A Geometria da Mecânica Quântica](#)

[Perguntinha Capciosa](#)

- Leis de Newton:
  1. Inércia;
  2.  $\vec{F} = m \vec{a}$ ;
  3. Ação e Reação.

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileu

---

A Geometria de Newton

Isaac Newton

Isaac Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

- Leis de Newton:
  1. Inércia;
  2.  $\vec{F} = m \vec{a}$ ;
  3. Ação e Reação.
- Movimento Circular (uniforme e acelerado): aceleração tangente e perpendicular (centrípeta).

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileu

---

A Geometria de Newton

Isaac Newton

Isaac Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

- Leis de Newton:
  1. Inércia;
  2.  $\vec{F} = m \vec{a}$ ;
  3. Ação e Reação.
- Movimento Circular (uniforme e acelerado): aceleração tangente e perpendicular (centrípeta).
- Lei da Gravitação Universal:  $\vec{F}_G = G \frac{M m}{d^2}$ .

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileu

---

A Geometria de Newton

Isaac Newton

Isaac Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

- Leis de Newton:
  1. Inércia;
  2.  $\vec{F} = m \vec{a}$ ;
  3. Ação e Reação.
- Movimento Circular (uniforme e acelerado): aceleração tangente e perpendicular (centrípeta).
- Lei da Gravitação Universal:  $\vec{F}_G = G \frac{M m}{d^2}$ .
- Co-invenção (com Leibniz) do Cálculo Integral e Diferencial.

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileu

---

A Geometria de Newton

Isaac Newton

Isaac Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---



# Geometria e Física: O Contemporâneo

[Geometria e Física: Os primórdios](#)

[A Geometria de Galileo](#)

[A Geometria de Newton](#)

**[Geometria e Física: O Contemporâneo](#)**

[E todos viveram felizes. . .](#)

[A Geometria de Einstein](#)

[A Geometria da Mecânica Quântica](#)

[Perguntinha Capciosa](#)

# E todos viveram felizes...

- Isaac Newton: Mecânica Clássica — Geometria Euclidiana (extrínseca; métrica);

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileu

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo  
E todos viveram felizes. . .

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

# E todos viveram felizes...

- Isaac Newton: Mecânica Clássica — Geometria Euclidiana (extrínseca; métrica);
- James Clerk Maxwell: Eletrodinâmica Clássica — Geometria Euclidiana (extrínseca; métrica);

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileo

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo  
E todos viveram felizes. . .

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

# E todos viveram felizes...

- Isaac Newton: Mecânica Clássica — Geometria Euclidiana (extrínseca; métrica);
- James Clerk Maxwell: Eletrodinâmica Clássica — Geometria Euclidiana (extrínseca; métrica);
- Georg Riemann: Geometria Riemanniana, não-Euclidiana (intrínseca; métrica, conexão, curvatura e torção)!

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileo

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo  
E todos viveram felizes. . .

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

# E todos viveram felizes...

- Isaac Newton: Mecânica Clássica — Geometria Euclidiana (extrínseca; métrica);
- James Clerk Maxwell: Eletrodinâmica Clássica — Geometria Euclidiana (extrínseca; métrica);
- Georg Riemann: Geometria Riemanniana, não-Euclidiana (intrínseca; métrica, conexão, curvatura e torção)!
- Carl Jacobi, Sir William Hamilton e Jules Henri Poincaré: Introduziram os conceitos da Geometria Riemanniana na Mecânica Clássica de Newton e na Eletrodinâmica Clássica de Maxwell:

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileu

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo  
E todos viveram felizes...

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

# E todos viveram felizes...

- Isaac Newton: Mecânica Clássica — Geometria Euclidiana (extrínseca; métrica);
- James Clerk Maxwell: Eletrodinâmica Clássica — Geometria Euclidiana (extrínseca; métrica);
- Georg Riemann: Geometria Riemanniana, não-Euclidiana (intrínseca; métrica, conexão, curvatura e torção)!
- Carl Jacobi, Sir William Hamilton e Jules Henri Poincaré: Introduziram os conceitos da Geometria Riemanniana na Mecânica Clássica de Newton e na Eletrodinâmica Clássica de Maxwell:
  - ◆ Campos Elétrico e Magnético → 2-forma (“matriz”):
$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu;$$

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileo

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo  
E todos viveram felizes. . .

---

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

# E todos viveram felizes...

- Isaac Newton: Mecânica Clássica — Geometria Euclidiana (extrínseca; métrica);
- James Clerk Maxwell: Eletrodinâmica Clássica — Geometria Euclidiana (extrínseca; métrica);
- Georg Riemann: Geometria Riemanniana, não-Euclidiana (intrínseca; métrica, conexão, curvatura e torção)!
- Carl Jacobi, Sir William Hamilton e Jules Henri Poincaré: Introduziram os conceitos da Geometria Riemanniana na Mecânica Clássica de Newton e na Eletrodinâmica Clássica de Maxwell:
  - ◆ Campos Elétrico e Magnético → 2-forma (“matriz”):  
 $F = F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ;
  - ◆ Métrica de Jacobi → Fluxo Hamiltoniano  $\equiv$  Fluxo Geodésico:  $\tilde{g}_E = 2(E + V)g \Rightarrow$

$$E = \mathcal{H} = \frac{1}{2} g(p, p) + V \equiv \tilde{g}_E(p, p) .$$

Geometria e Física: Os primórdios

A Geometria de Galileo

A Geometria de Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo  
E todos viveram felizes. . .

A Geometria de Einstein

A Geometria da Mecânica Quântica

Perguntinha Capciosa

- Velocidade da Luz,  $c$ , é **constante**:  
 $c = 299.792.458\text{m/s} \approx 300.000\text{Km/s}$ ;

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileo

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein  
para sempre...

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---



- Velocidade da Luz,  $c$ , é **constante**:  
 $c = 299.792.458\text{m/s} \approx 300.000\text{Km/s}$ ;
- “*Cadê o æther que estava aqui?*”: O conceito de *aither*, criado por Aristóteles (material formador dos corpos celestes; movimento circular natural) é experimentalmente falsificado pelo experimento de Michelson-Morley.

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileo

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein  
para sempre...

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

- Velocidade da Luz,  $c$ , é **constante**:  
 $c = 299.792.458\text{m/s} \approx 300.000\text{Km/s}$ ;
- “*Cadê o æther que estava aqui?*”: O conceito de *aither*, criado por Aristóteles (material formador dos corpos celestes; movimento circular natural) é experimentalmente falsificado pelo experimento de Michelson-Morley.
- Albert Einstein (veja também Einstein Archives Online, Albert Einstein Archives, Albert Einstein Online, Einstein AMNH, Einstein Image and Impact e Einstein’s Big Idea): Usando e extendendo as idéias de Maxwell, Jacobi, Hamilton e Poincaré, usa a Geometria Riemanniana para generalizar a Mecânica Clássica, criando as Teorias da Relatividade Restrita e Geral (veja também The General Relativity Tutorial)!

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileo

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein  
para sempre...

---

A Geometria da Mecânica Quântica

---

Perguntinha Capciosa

---

- Velocidade da Luz,  $c$ , é **constante**:  
 $c = 299.792.458\text{m/s} \approx 300.000\text{Km/s}$ ;
- “*Cadê o æther que estava aqui?*”: O conceito de *aither*, criado por Aristóteles (material formador dos corpos celestes; movimento circular natural) é experimentalmente falsificado pelo experimento de Michelson-Morley.
- Albert Einstein (veja também Einstein Archives Online, Albert Einstein Archives, Albert Einstein Online, Einstein AMNH, Einstein Image and Impact e Einstein’s Big Idea): Usando e extendendo as idéias de Maxwell, Jacobi, Hamilton e Poincaré, usa a Geometria Riemanniana para generalizar a Mecânica Clássica, criando as Teorias da Relatividade Restrita e Geral (veja também The General Relativity Tutorial)!
- espaço-tempo 4-dimensional; Curvatura  $\equiv$  Massa!

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileu

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein  
para sempre...

---

A Geometria da Mecânica Quântica

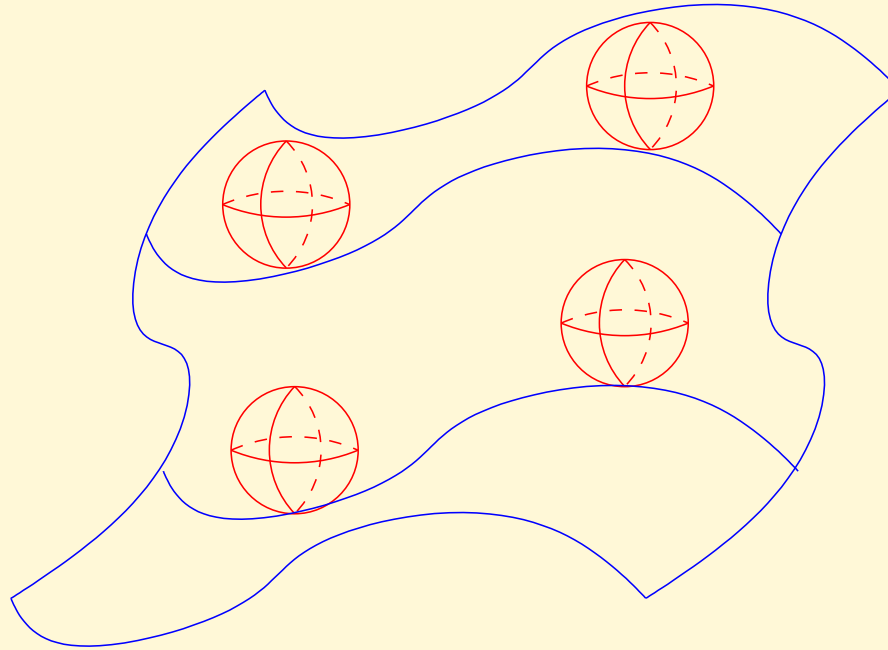
---

Perguntinha Capciosa

---

# Teorias de Gauge...

- Espaço-tempo: variedade de base, relatividade restrita;  
Fibra: grupo de simetria, Campo Quântico.



Geometria e Física: Os primórdios

A Geometria de Galileo

A Geometria de Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

A Geometria de Einstein

A Geometria da Mecânica Quântica

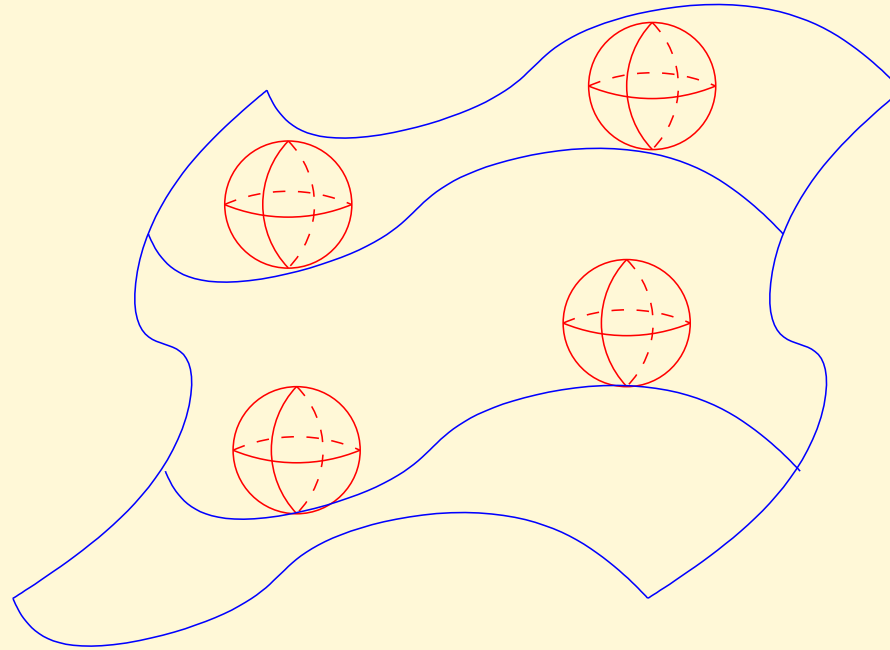
Teorias de Gauge...

Aonde nenhum homem jamais foi...

Perguntinha Capciosa

# Teorias de Gauge...

- Espaço-tempo: variedade de base, relatividade restrita;  
Fibra: grupo de simetria, Campo Quântico.



- Toda informação dum determinada Teoria Quântica de Campos está contida na *Integral de Trajetória de Feynman*:

$$\mathcal{Z} = \int e^{i \int \mathcal{L}(\phi)} \mathcal{D}\phi .$$

Geometria e Física: Os primórdios

A Geometria de Galileo

A Geometria de Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

A Geometria de Einstein

A Geometria da Mecânica Quântica

Teorias de Gauge...

Aonde nenhum homem jamais foi...

Perguntinha Capciosa

# Aonde nenhum homem jamais foi...

- **Gravitação Quântica:** É a *arte* de integrar a Mecânica Quântica e a Relatividade Geral num mesmo arcaboço matemático! Dessa forma elas deixam de existir por si sós e passam a formar uma *nova* teoria, mais completa e mais profunda.

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileu

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

Teorias de Gauge...

Aonde nenhum homem jamais foi...

Perguntinha Capciosa

---

# Aonde nenhum homem jamais foi...

- **Gravitação Quântica:** É a *arte* de integrar a Mecânica Quântica e a Relatividade Geral num mesmo arcaboço matemático! Dessa forma elas deixam de existir por si sós e passam a formar uma *nova* teoria, mais completa e mais profunda.
- Candidatos atuais: Teoria de SuperCordas, Gravitação Quântica de Laços; Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos; Triangulação Dinâmica e Cálculo de Regge; Geometria Não-Comutativa, Formulações em Superfícies Nulas, Modelos de Espuma de Spin; Conjuntos Causais e “Twistors”.

Geometria e Física: Os primórdios

---

A Geometria de Galileu

---

A Geometria de Newton

---

Geometria e Física: O Contemporâneo

---

A Geometria de Einstein

---

A Geometria da Mecânica Quântica

Teorias de Gauge...

Aonde nenhum homem jamais foi...

Perguntinha Capciosa

---

Quantas vezes você pode cortar um pizza grande em metades até que cada pedaço tenha o tamanho de um átomo?

**32!** 😊

Geometria e Física: Os primórdios

A Geometria de Galileu

A Geometria de Newton

Geometria e Física: O Contemporâneo

A Geometria de Einstein

A Geometria da Mecânica Quântica

Perguntinha Capciosa

Será?